

# ESTIMATION DE QUANTILES CONDITIONNELS BASÉE SUR LA QUANTIFICATION OPTIMALE SOUS $R$

Isabelle Charlier<sup>(1,2)</sup>, Davy Paindaveine<sup>(1)</sup> et Jérôme Saracco<sup>(2)</sup>

(1) Université Libre de Bruxelles et ECARES, Bruxelles, Belgique

(2) Université de Bordeaux et Inria Bordeaux Sud-Ouest, équipe CQFD

3<sup>èmes</sup> Rencontres R, Montpellier  
26 juin 2014



UNIVERSITÉ  
LIBRE  
DE BRUXELLES

université  
de BORDEAUX

# PLAN

- 1 RÉGRESSION QUANTILE VIA QUANTIFICATION OPTIMALE
- 2 CHOIX DE  $N$
- 3 PACKAGE QUANTIFQUANTILE

# PLAN

- 1 RÉGRESSION QUANTILE VIA QUANTIFICATION OPTIMALE
  - Quantiles conditionnels
  - Quantification optimale
  - Approximation et estimation des quantiles conditionnels
- 2 CHOIX DE  $N$
- 3 PACKAGE QUANTIFQUANTILE

## DÉFINITIONS

- Soient  $Y$  variable aléatoire réelle et  $X = (X_1, \dots, X_d)$  covariable.  
→ Modèle sous-jacent :  $Y = m(X, \epsilon)$
- $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$  la distribution conditionnelle de  $Y|X = x$ .

## DÉFINITION 1

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , le quantile conditionnel  $q_\alpha(x)$  de  $Y|X = x$  est défini comme

$$q_\alpha(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y|x) \geq \alpha\}.$$

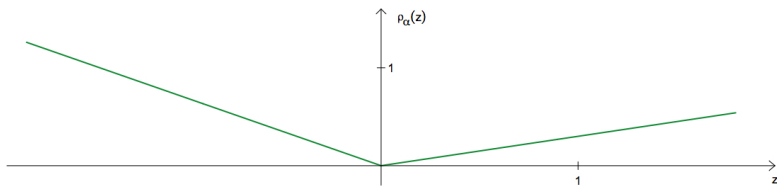
## DÉFINITION 2

De manière équivalente,  $q_\alpha(x)$  est la solution du problème d'optimisation

$$q_\alpha(x) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho_\alpha(Y - a)|X = x],$$

où  $\rho_\alpha(z) = -(1 - \alpha)z\mathbb{I}(z < 0) + \alpha z\mathbb{I}(z \geq 0)$

## DÉFINITIONS



## DÉFINITION 2

De manière équivalente,  $q_\alpha(x)$  est la solution du problème d'optimisation

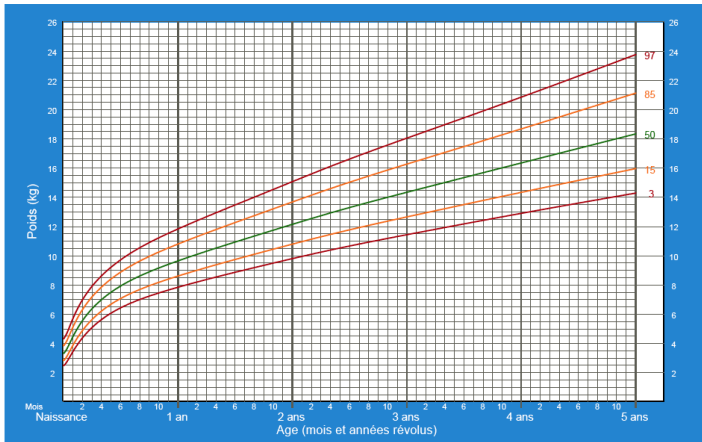
$$q_\alpha(x) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho_\alpha(Y - a) | X = x],$$

où  $\rho_\alpha(z) = -(1 - \alpha)z\mathbb{I}(z < 0) + \alpha z\mathbb{I}(z \geq 0)$

## ILLUSTRATION : APPLICATION EN MÉDECINE PÉDIATRIQUE

**Poids-pour-l'âge GARÇONS**

De la naissance à 5 ans (percentiles)

Organisation  
mondiale de la Santé

Normes OMS de croissance de l'enfant

# HISTORIQUE

- Utilisée depuis les années 50 en ingénierie : théorie de l'information, traitement du signal.
- Quantifier = Discrétiser un signal continu grâce à un nombre fixé de **quantifieurs**.
- Importance de la position des quantifieurs pour une transmission efficace du signal → **optimisation**.
- Beaucoup utilisée pour des problèmes en probabilités numériques et en finance, mais très peu en statistique.

## QUANTIFICATION EN NORME $L_p$ : DÉFINITION PRÉCISE

Soit  $X$  un  $d$ -vecteur aléatoire de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  avec  $\|X\|_p := E[|X|^p]^{1/p} < \infty$ ,  $p \geq 1$ .

- La **quantification** consiste à trouver la meilleure approximation de la loi de  $X$  avec une loi discrète de support de cardinal  $N$ .
- Soit  $\gamma^N$  une  $N$ -grille de  $\mathbb{R}^d$ . On définit  $\tilde{X}^N := \text{Proj}_{\gamma^N}(X)$  (au sens de la norme euclidienne).

### DÉFINITION

L'erreur de quantification par rapport à  $\gamma^N$  est définie comme  $\|X - \tilde{X}^N\|_p^p$ .

- Grille **optimale**  $\rightarrow$  minimiser l'erreur de quantification.
- Existence d'une  $N$ -grille optimale si  $P_X$  ne charge pas les hyperplans.
- En pratique : algorithme du gradient stochastique (CLVQ si  $p = 2$ ).



## ALGORITHME DU GRADIENT STOCHASTIQUE

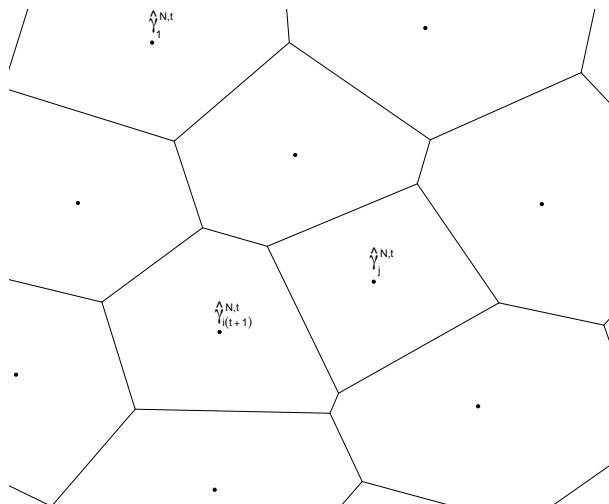
Construction en  $n$  étapes d'une grille optimale  $\hat{\gamma}^{N,n}$ , avec  $N$  fixé, à partir d'une grille initiale  $\hat{\gamma}^{N,0}$  :

- $(X_t)$ ,  $t = 1, \dots, n$ , des observations iid de même loi  $X$ .
- $(\delta_t)_{t \in \mathbb{N}_0} \subset (0, 1)$  telle que  $\sum_t \delta_t = \infty$  et  $\sum_t \delta_t^2 < \infty$ .
- **Step  $t = 0$**   
Choix de  $\hat{\gamma}^{N,0}$  en tirant avec remise parmi les  $X_i$  sans remise.

- **Step  $t = 1, \dots, n$**

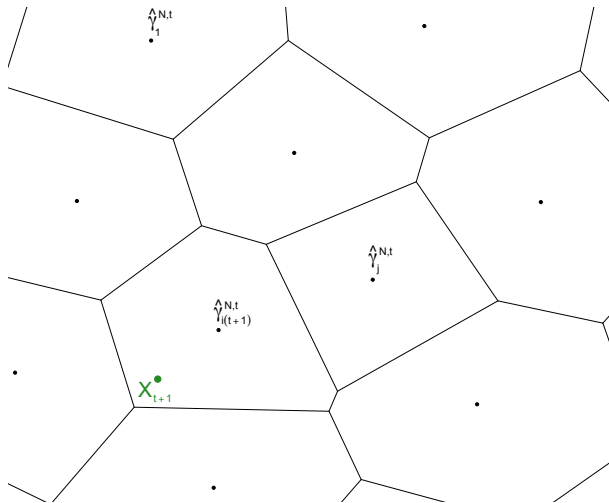
$$\hat{\gamma}_i^{N,t} = \begin{cases} \hat{\gamma}_i^{N,t-1} - \delta_t |\gamma_i^{N,t-1} - X_t|^{p-1} \frac{\gamma_i^{N,t-1} - X_t}{|\gamma_i^{N,t-1} - X_t|} & \text{si } \text{Proj}_{\hat{\gamma}^{N,t-1}}(X_t) = \hat{\gamma}_i^{N,t-1} \\ \hat{\gamma}_i^{N,t-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

## ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME CLVQ



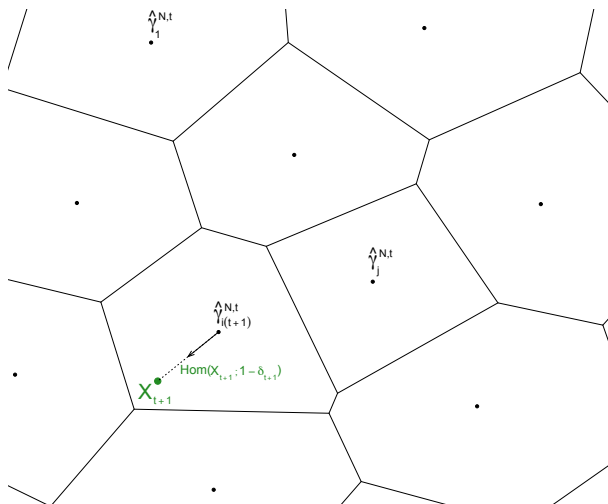
- Soit  $\hat{\gamma}^{N,t}$  la grille optimale à l'étape  $t$  ;
- Soit  $(X_t)_t$  une suite de v.a. iid de loi  $X$  ;

## ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME CLVQ



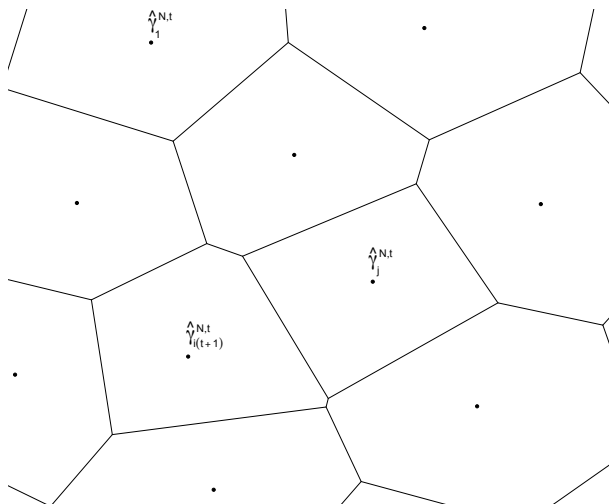
- Soit  $\hat{\gamma}^{N,t}$  la grille optimale à l'étape  $t$  ;
- Soit  $(X_t)_t$  une suite de v.a. iid de loi  $X$  ;
- Identifier le point de la grille le plus proche de  $X_{t+1}$  ;

## ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME CLVQ

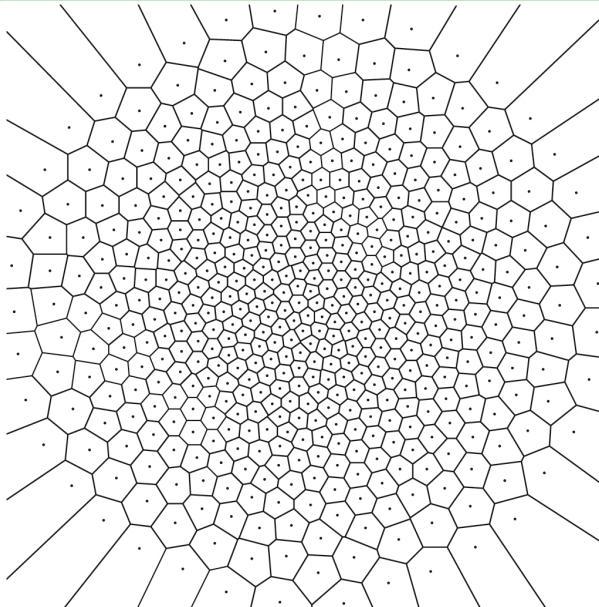


- Soit  $\hat{\gamma}^{N,t}$  la grille optimale à l'étape  $t$  ;
- Soit  $(X_t)_t$  une suite de v.a. iid de loi  $X$  ;
- Identifier le point de la grille le plus proche de  $X_{t+1}$  ;
- Le déplacer dans la direction de  $X_{t+1}$  ;

## ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME CLVQ



- Soit  $\hat{\gamma}^{N,t}$  la grille optimale à l'étape  $t$  ;
- Soit  $(X_t)_t$  une suite de v.a. iid de loi  $X$  ;
- Identifier le point de la grille le plus proche de  $X_{t+1}$  ;
- Le déplacer dans la direction de  $X_{t+1}$  ;
- Les autres points de la grille ne changent pas à l'étape  $t + 1$ .

GRILLE OPTIMALE POUR  $N = 500$  AU SENS  $L^2$  POUR LA LOI  $\mathcal{N}(0, I_2)$ 

## APPROXIMATION DES QUANTILES CONDITIONNELS

Idée : Remplacer  $X$  par sa version quantifiée  $\tilde{X}^N$  dans la définition.

## DÉFINITION

Nous approchons le quantile conditionnel d'ordre  $\alpha$  de  $Y$  sachant  $X = x$  par

$$\tilde{q}_\alpha^N(x) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho_\alpha(Y - a) | \tilde{X}^N = \tilde{x}],$$

où  $\tilde{x}$  est la projection de  $x$  sur  $\gamma^N$ .

- Résultat de convergence vers les quantiles conditionnels théoriques et vitesse pour  $N \rightarrow \infty$ .
- cf. Charlier, Paindaveine et Saracco (2014a).

CONSTRUCTION DE L'ESTIMATEUR  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

Soit  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1,\dots,n}$  un échantillon de taille  $n$ .

- **Quantifier**  $X$  en norme  $L_2$  grâce à l'algorithme du gradient stochastique.  
 $\hookrightarrow$  Grille  $\hat{\gamma}^{N,n}$  pour  $X$
- **Projeter** la partie en  $X$  de l'échantillon sur  $\hat{\gamma}^{N,n}$ .  
 $\hookrightarrow \{(\hat{X}_1, Y_1), \dots, (\hat{X}_n, Y_n)\}$

## DÉFINITION DE L'ESTIMATEUR

$$\hat{q}_\alpha^{N,n}(x) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \rho_\alpha(Y_i - a) \mathbb{I}_{[\hat{X}_i = \hat{x}]},$$

où  $\hat{x}$  est la projection de  $x$  sur  $\hat{\gamma}^{N,n}$ .



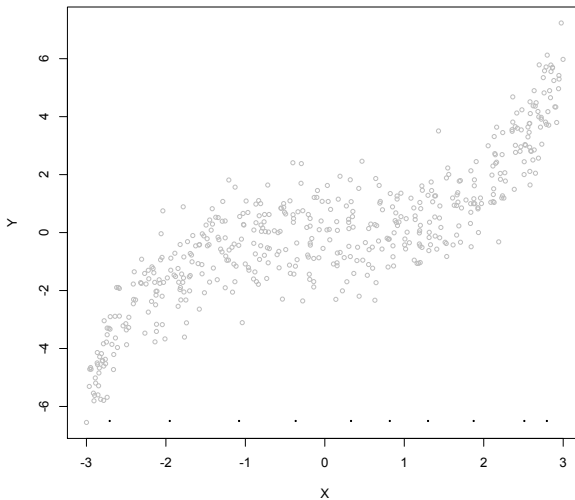
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

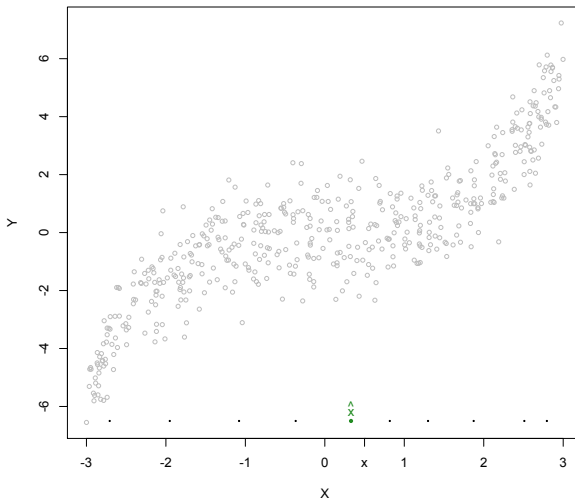
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

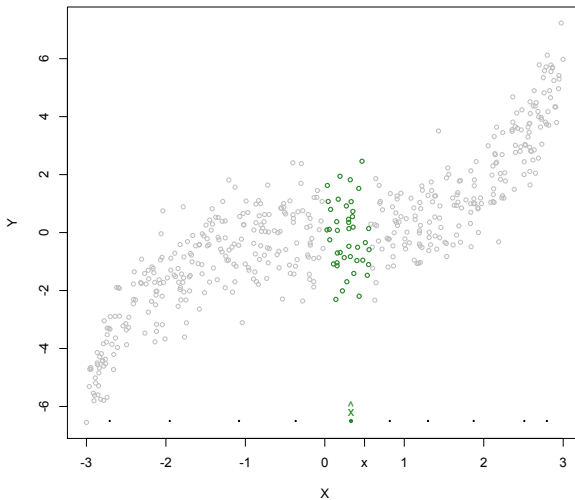
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

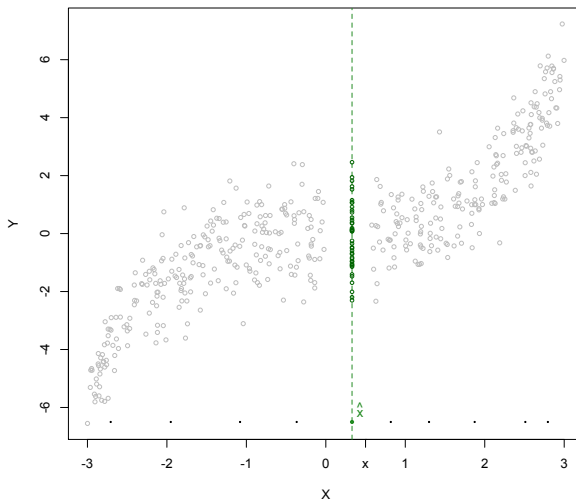
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

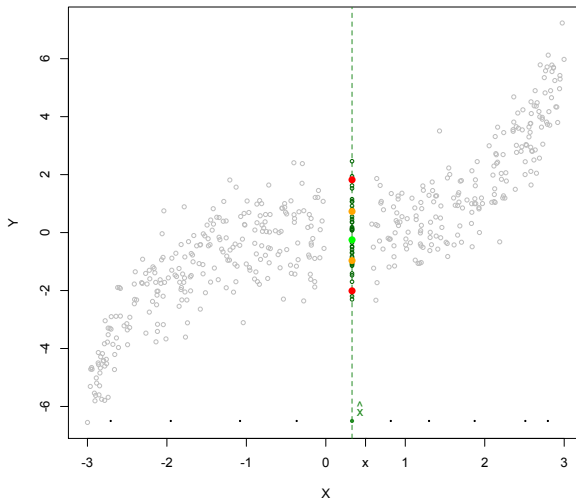
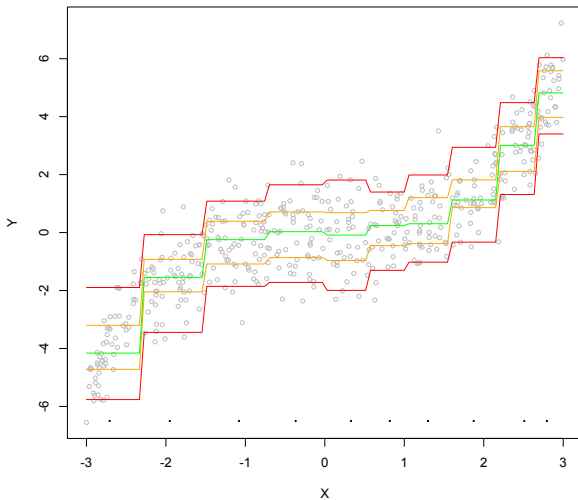
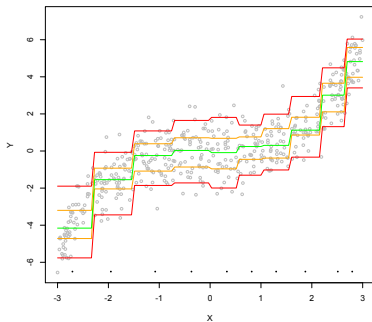
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

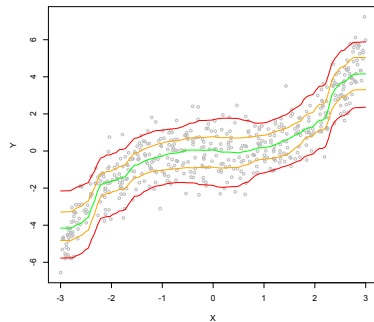
ILLUSTRATION  $\hat{q}_\alpha^{N,n}(x)$ 

## ESTIMATEURS BOOTSTRAP

- Dans le cas de petites tailles d'échantillons : l'algorithme est lent à converger.
  - Grilles pas si optimales
  - Courbes peu régulières
  - ↔ Définition d'une version **bootstrap** de l'estimateur
- Idée principale : générer  $B$  échantillons de taille  $n$  à partir de notre échantillon de départ avec remise.
  - Pour chaque échantillon, estimer  $q_\alpha(x)$ 
    - ⇒  $\hat{q}_\alpha^{(1)}(x), \dots, \hat{q}_\alpha^{(B)}(x)$
  - Considérer la moyenne
    - ⇒  $\bar{q}_{\alpha,B}^{N,n}(x) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{q}_\alpha^{(i)}(x)$

COMPARAISON DE  $\widehat{q}_\alpha^{N,n}(x)$  ET  $\bar{q}_{\alpha,B}^{N,n}(x)$ 

(A)



(B)

FIGURE : Pour  $n = 500$ , comparaison de  $\widehat{q}_\alpha^{N,n}(x)$  et  $\bar{q}_{\alpha,B}^{N,n}(x)$



# PLAN

- 1 RÉGRESSION QUANTILE VIA QUANTIFICATION OPTIMALE
- 2 CHOIX DE  $N$ 
  - Idée de départ
  - Data-driven selection
- 3 PACKAGE QUANTIFQUANTILE

# CHOIX DE $N$ POUR DES MODÈLES SIMULÉS

Modèles simulés → Connaissance des quantiles conditionnels théoriques.

- Prenons  $\{x_1, \dots, x_J\}$  une grille fixée du support de  $X$  de taille  $J$ .
- Nous calculons le MSE pour évaluer l'erreur commise :

$$\text{MSE}(N) = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J (q_\alpha(x_i) - \bar{q}_\alpha^{N,n}(x_i))^2,$$

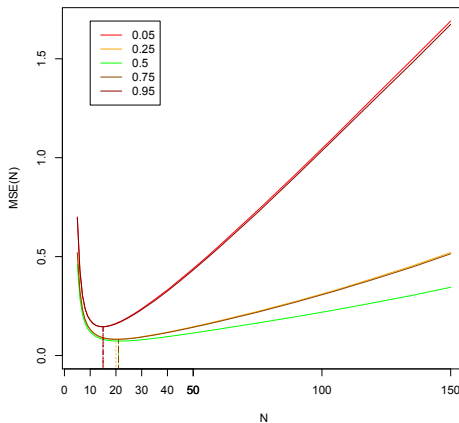
- On cherche la valeur de  $N$  qui minimise ce MSE.

500 réplifications de différents modèles pour différentes tailles d'échantillons

↔ MSE en fonction de  $N$  fonction convexe

⇒ Existence d'une **valeur optimale** pour  $N$ .

## ILLUSTRATION



**FIGURE :** Pour  $n = 300$  et  $500$  réplifications, courbes des MSE estimés en fonction de  $N$  avec  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$ ,  $B = 50$ .

# CHOIX DE $N$ EN PRATIQUE

Dans des situations pratiques, nous ne connaissons pas les quantiles conditionnels théoriques.

→ Nous ne savons pas calculer ces  $MSE(N)$ .

→ Comment choisir  $N$  ?

---

Idée :

- Remplacer les quantiles conditionnels théoriques dans l'expression  $MSE(N)$  par des versions ne dépendant que des données  $\Rightarrow \widehat{MSE}(N)$ .
- Observer la **convexité** des courbes.
- Vérifier que le minimum obtenu corresponde au minimum de  $MSE(N)$  dans les modèles simulés.

CHOIX DE  $N$  EN PRATIQUE

Dans des situations pratiques, nous ne connaissons pas les quantiles conditionnels théoriques.

→ Nous ne savons pas calculer ces  $MSE(N)$ .

→ Comment choisir  $N$  ?

Idée :

- Remplacer les quantiles conditionnels théoriques dans l'expression  $MSE(N)$  par des versions ne dépendant que des données  $\Rightarrow \widehat{MSE}(N)$ .
  - Générer  $\tilde{B}$  échantillons de taille  $n$  à partir de notre échantillon de départ avec remise.
  - Pour chaque échantillon, estimer  $q_\alpha(x) \Rightarrow \hat{q}_\alpha^{(1)}, \dots, \hat{q}_\alpha^{(\tilde{B})}$ .
  - Remplacer  $q_\alpha(x)$  par chacune de ces estimations dans  $MSE(N) \Rightarrow \tilde{B}$  versions.
  - En calculer la moyenne

$$\widehat{MSE} = \widehat{MSE}(N) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{\tilde{B}} \sum_{b=1}^{\tilde{B}} (\hat{q}_\alpha^{N,n}(x_j) - \hat{q}_\alpha^{(b)}(x_j))^2 \right).$$

# CHOIX DE $N$ EN PRATIQUE

Dans des situations pratiques, nous ne connaissons pas les quantiles conditionnels théoriques.

→ Nous ne savons pas calculer ces  $MSE(N)$ .

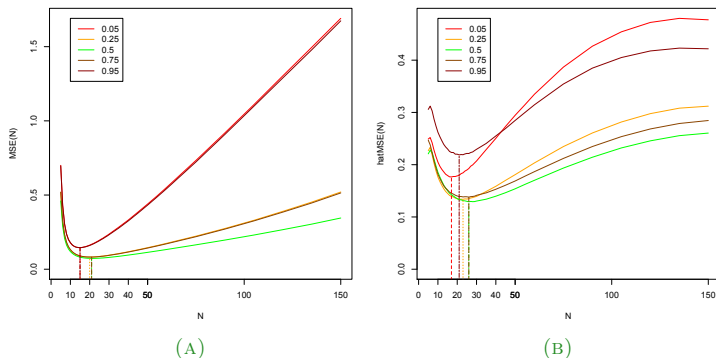
→ Comment choisir  $N$  ?

---

Idée :

- Remplacer les quantiles conditionnels théoriques dans l'expression  $MSE(N)$  par des versions ne dépendant que des données  $\Rightarrow \widehat{MSE}(N)$ .
- Observer la convexité des courbes.
- Vérifier que le minimum obtenu corresponde au minimum de  $MSE(N)$  dans les modèles simulés.

# MSE( $N$ ) vs $\widehat{\text{MSE}}(N)$



**FIGURE :** Pour  $n = 300$ ,  $B = 50$  et 500 réplifications, (a) Courbes des MSE théoriques en fonction de  $N$ , (b) Courbes des MSE estimés en fonction de  $N$ ,  $\widehat{B} = 30$ , en utilisant  $\widehat{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$ .

# PLAN

- 1 RÉGRESSION QUANTILE VIA QUANTIFICATION OPTIMALE
- 2 CHOIX DE  $N$
- 3 **PACKAGE QUANTIFQUANTILE**
  - Estimation des quantiles conditionnels



## FONCTIONS PRINCIPALES DU PACKAGE

- Ce package est composé de trois fonctions principales.
  - `QuantifQuantile` : adaptée pour la dimension 1, fournit des sorties graphiques en 2D avec `plot`.
  - `QuantifQuantile.d2` : adaptée pour la dimension 2, fournit des sorties graphiques en 3D avec `plot` en utilisant le package `rgl`.
  - `QuantifQuantile.d` : convient pour toute dimension, pas de sortie graphique.

# FONCTIONS PRINCIPALES DU PACKAGE

- Fonctions QuantifQuantile, QuantifQuantile.d2, QuantifQuantile.d
- Arguments
  - $X$  : covariable,
  - $Y$  : variable dépendante,
  - $x$  : points d'intérêt pour  $q_\alpha(x)$ ,
  - testN : grille de valeurs testées pour  $N$ ,
  - alpha : ordre des quantiles conditionnels,
  - B : nombre de réplifications bootstrap pour  $\bar{q}_{\alpha,B}^{N;n}(x)$ ,
  - tildeB : nombre de réplifications bootstrap pour le critère  $\widehat{MSE}$ ,
  - p : indice de quantification en norme  $L_p$ ,
  - same\_N : booléen, indique si le même  $N$  est sélectionné pour chaque  $\alpha$ .

## FONCTIONS PRINCIPALES DU PACKAGE

- Fonctions `QuantifQuantile`, `QuantifQuantile.d2`, `QuantifQuantile.d`
- Arguments :  $X$ ,  $Y$ ,  $x$ , `testN`,  $\alpha$ ,  $B$ , `tildeB`,  $p$ , `same_N`
- Réponse : Une liste de classe `QuantifQuantile` comprenant :
  - `hatq_opt` : matrice des quantiles conditionnels estimés avec  $N=N_{opt}$ ,
  - `N_opt` : valeur optimale pour  $N$  sélectionnée (vecteur si `same_N=FALSE`),
  - `hatMSE_N` : matrice des erreurs estimées utilisées pour sélectionner  $N_{opt}$ ,
  - `hatq_N` : matrice des quantiles conditionnels estimés pour chaque  $N$ ,
  - $X$  : covariable,
  - $Y$  : variable dépendante,
  - $x$  : points d'intérêt pour  $q_\alpha(x)$ ,
  - $\alpha$  : ordre des quantiles conditionnels,
  - `testN` : grille de valeurs testées pour  $N$ .

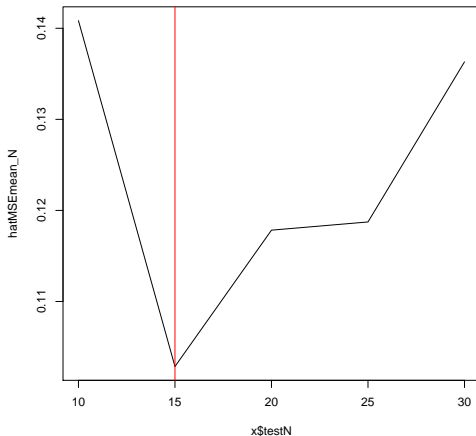
ILLUSTRATION POUR  $d = 1$ 

Illustration sur un échantillon de taille  $n = 300$

```
n <- 300
X <- runif(n,-2,2)
Y <- X^2 + rnorm(n)
x <- seq(min(X),max(X),length=100)
alpha <- c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)
testN <- seq(10,30,by=5)
res <- QuantifQuantile(X,Y,x=x,alpha=alpha,testN=testN)
```

↪ Vérification du choix de testN grâce à la fonction plot.select.N

```
plot.select.N(res)
```

ILLUSTRATION POUR  $d = 1$ 

**FIGURE :** Pour un échantillon de taille 300 avec  $X \sim U(-2, 2)$  et  $Y = X^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, la courbe de  $\widehat{\text{MSE}}(N)$  en fonction de  $N$  fournie par `plot.select.N`, avec  $N$  de 5 à 30 par pas de 5.

ILLUSTRATION POUR  $d = 1$ 

Illustration sur une échantillon de taille  $n = 300$

```
n <- 300
X <- runif(n,-2,2)
Y <- X^2 + rnorm(n)
x <- seq(min(X),max(X),length=100)
alpha <- c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)
testN <- seq(10,30,by=5)
res <- QuantifQuantile(X,Y,x=x,alpha=alpha,testN=testN)
```

↔ Vérification du choix de testN grâce à la fonction plot.select.N  
plot.select.N(res)

↔ Graphe des courbes quantiles conditionnels estimés

```
col.plot <- c("grey","red","orange","green","orange","red")
plot(res,col.plot=col.plot)
```

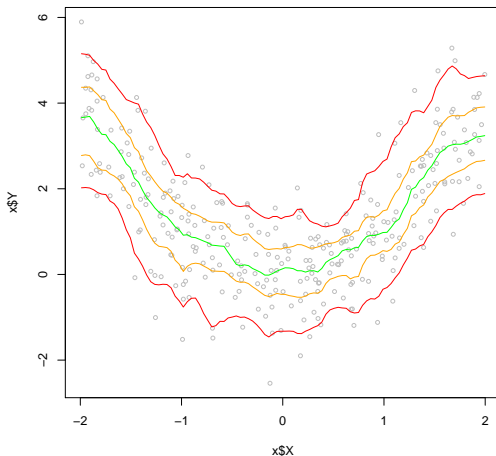
ILLUSTRATION POUR  $d = 1$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 300 avec  $X \sim U(-2, 2)$  et  $Y = X^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\hat{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

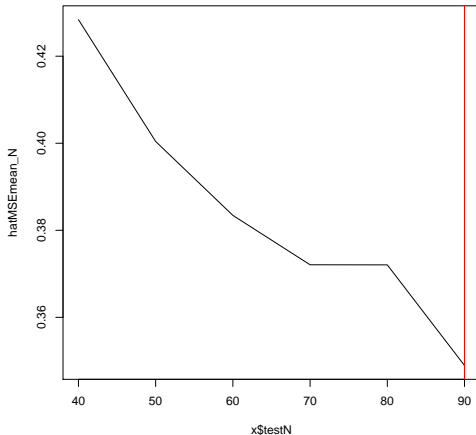
Illustration sur une échantillon de taille  $n = 1000$

```
n <- 1000
X <- matrix(runif(n*2,-2,2))
Y <- apply(X^2,2,sum) + rnorm(n)
alpha <- c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)
testN <- seq(40,90,by=10)
res <- QuantifQuantile.d2(X,Y,testN=testN,alpha=alpha,B=20,tildeB=15)
```

↔ Vérification du choix de testN grâce à la fonction plot.select.N

```
plot.select.N(res)
```



ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

**FIGURE :** Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, la courbe de  $\widehat{\text{MSE}}(N)$  en fonction de  $N$  fournie par `plot.select.N`, avec  $N$  de 40 à 90 par pas de 10.

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

Illustration sur une échantillon de taille  $n = 1000$

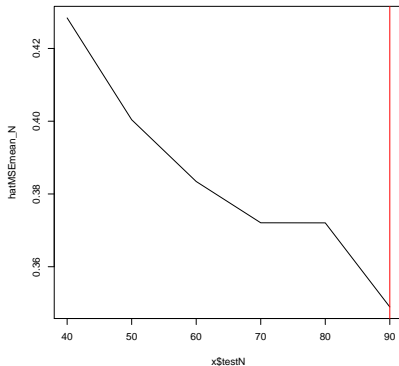
```
n <- 1000
X <- matrix(runif(n*2,-2,2))
Y <- apply(X^2,2,sum) + rnorm(n)
alpha <- c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)
testN <- seq(40,90,by=10)
res <- QuantifQuantile.d2(X,Y,testN=testN,alpha=alpha,B=20,tildeB=15)
```

↔ Vérification du choix de testN grâce à la fonction plot.select.N

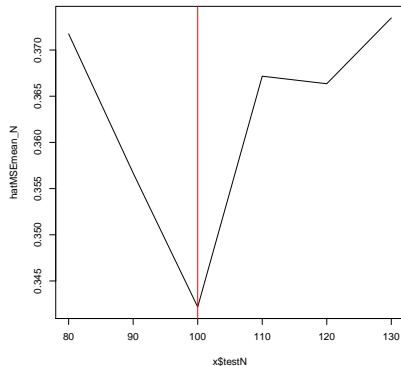
```
plot.select.N(res)
```

↔ Mise à jour de testN et vérification

```
testN <- seq(80,130,by=10)
res <- QuantifQuantile.d2(X,Y,testN=testN,alpha=alpha,B=20,tildeB=15)
plot.select.N(res)
```

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

(A)



(B)

**FIGURE** : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, la courbe de  $\widehat{MSE}(N)$  en fonction de  $N$ , avec (a)  $N$  de 40 à 90 par pas de 10 et (b)  $N$  de 80 à 130 par pas de 10 (fournie par `plot.select.N`).

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

Illustration sur une échantillon de taille  $n = 1000$

```
n <- 1000
X <- matrix(runif(n*2,-2,2))
Y <- apply(X^2,2,sum) + rnorm(n)
alpha <- c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)
testN <- seq(40,90,by=10)
res <- QuantifQuantile.d2(X,Y,testN=testN,alpha=alpha,B=20,tildeB=15)
```

↪ Vérification du choix de testN grâce à la fonction plot.select.N

```
plot.select.N(res)
```

↪ Mise à jour de testN et vérification

```
testN <- seq(80,130,by=10)
res <- QuantifQuantile.d2(X,Y,testN=testN,alpha=alpha,B=20,tildeB=15)
plot.select.N(res)
```

↪ Graphe des surfaces de quantiles conditionnels estimés

```
col.plot <- c("black","red","orange","green","orange","red")
plot(res,col.plot=col.plot)
```

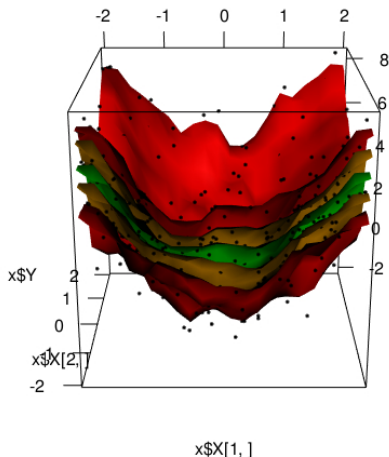
ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

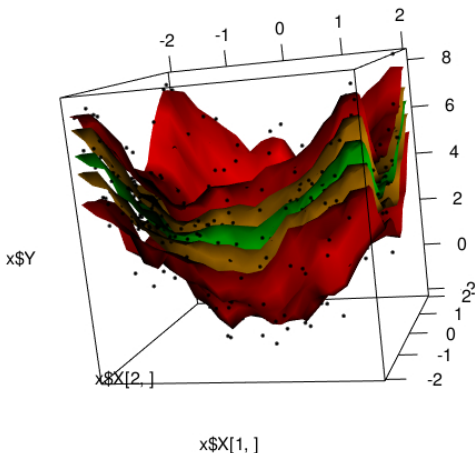
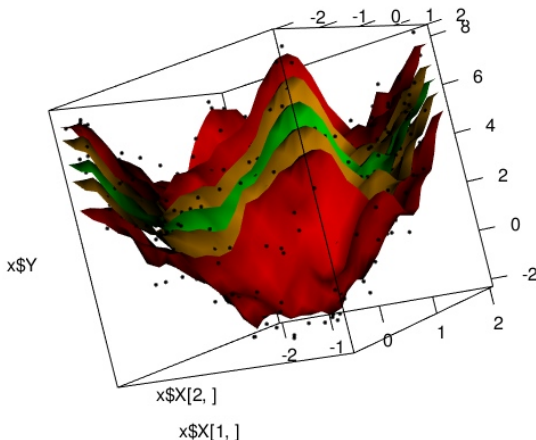
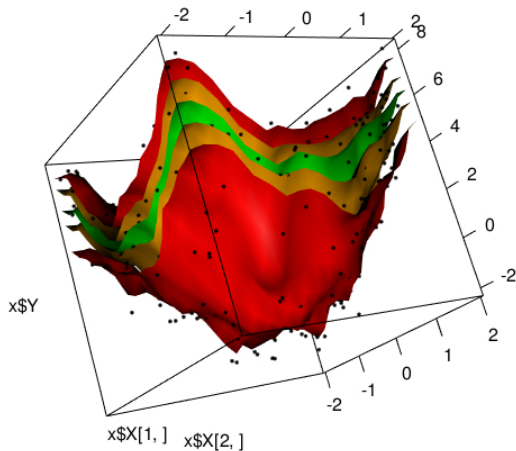
ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

**FIGURE** : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

**FIGURE :** Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.



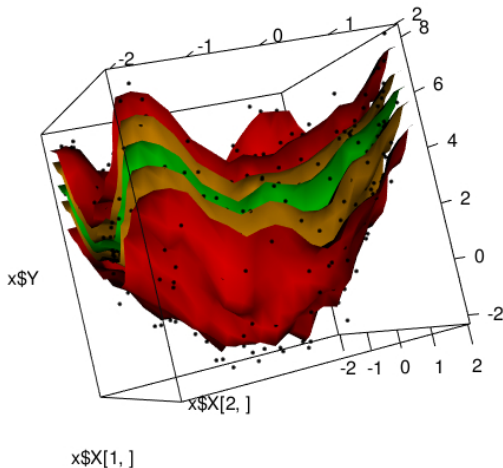
ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

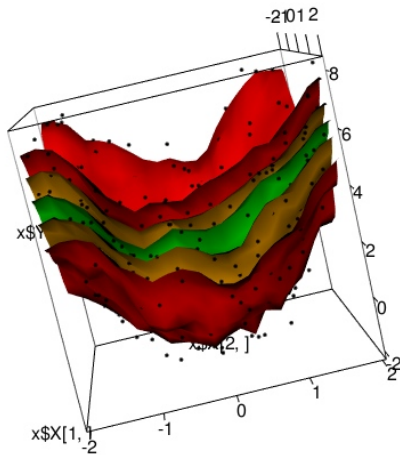
ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

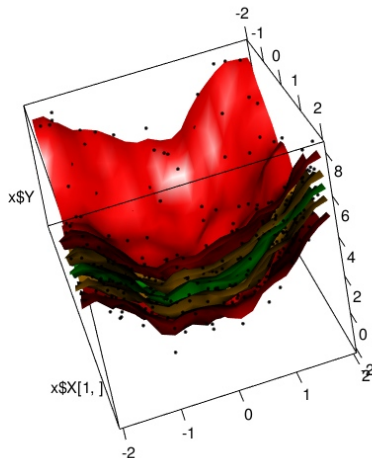
ILLUSTRATION POUR  $d = 2$ 

FIGURE : Pour un échantillon de taille 1000 avec  $X \sim U(-2, 2)^2$  et  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une erreur normale, les courbes de  $\bar{q}_{\alpha, B}^{N, n}(x)$  fournies par plot.

# Merci pour votre attention !

---

Le package QuantifQuantile est disponible sur le CRAN.



Isabelle Charlier, Davy Paindaveine, and Jérôme Saracco.

Conditional quantile estimation through optimal quantization.

*Submitted, 2014.*



Isabelle Charlier, Davy Paindaveine, and Jérôme Saracco.

Numerical study of a conditional quantile estimator based on optimal quantization.

*Manuscript in preparation, 2014.*



Isabelle Charlier, Davy Paindaveine, and Jérôme Saracco.

QuantifQuantile : a R package for estimating conditional quantiles using optimal quantization.

*Manuscript in preparation, 2014.*